

预测控制的常用模型及其相互关系和统一形式

徐湘元¹, 毛宗源²

(1. 广东工业大学 电气工程及自动化系, 广东 广州 510090;
2. 华南理工大学 自动控制工程系, 广东 广州 510640)

摘要: 针对预测控制算法中几种不同模型描述形式, 揭示了它们之间的联系, 给出了相应的转换公式, 为预测控制系统的设计与分析提供了方便, 最后指出这些模型可以用状态空间表示法来统一。

关键词: 模型描述类型; 模型间的关系; 状态空间法; 预测控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2000)03-0031-05

预测控制是一类先进的计算机控制算法, 由于它独特的机制, 所以在工业控制中获得了成功的应用。目前, 它的算法已发展到几十种之多, 且各算法采用的描述模型不同, 如: 模型算法控制采用的是脉冲响应模型, 动态矩阵控制选择的是阶跃响应模型, 而广义预测控制却选用差分方程模型。由于是同一对象, 这些不同的表述之间应该存在某些联系。另外, 设计和分析系统时, 往往需要将一种模型形式等效地转换为另一种形式。本文就这些问题进行讨论: 摆出预测控制几种常用的模型描述形式, 揭示它们之间的关系, 给出相应的转换公式, 并用状态空间法统一各模型形式。

1 预测控制常用模型的类型

预测控制常用模型分为两类: 非参数模型和参数模型, 非参数模型又分为脉冲响应模型和阶跃响应模型等; 参数模型分为差分方程模型和离散状态空间模型, 具体情况见图 1。

1.1 脉冲响应模型^[1]

脉冲响应模型是一种非参数模型, 是对动态系统的一种外部描述方法。对被控对象施加单

位脉冲信号: $u(z^{-1}) = 1$, 测取 $t = 0, t = T, t = 2T, \dots$ 的响应值: $y(0) = g_0, y(T) = g_1, y(2T) = g_2, \dots, y(iT) = g_i, \dots$ 当 i 较大时, g_i 很小, 可忽略, 所以取前 N 项。于是有单位脉冲响应(Z 变换形式):

$$y(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_N z^{-N} = G(z^{-1}). \quad (1)$$

对任意输入 $\Delta u(k)$, 由离散卷积公式, 可描述输入输出关系如下:

收稿日期: 1999-12-10

作者简介: 徐湘元(1956), 男, 副教授; 研究方向: 工业过程控制。

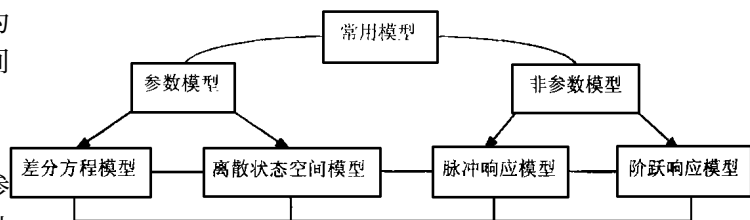


图 1 预测控制常用模型及其联系

$$y(k) = G(z^{-1}) \Delta u(k) = \sum_{j=0}^N g_j \Delta u(k-j). \quad (2)$$

1.2 阶跃响应模型^[1]

与脉冲响应相同, 阶跃响应也是一种非参数模型, 不过它施加的输入是单位阶跃: $u(z^{-1}) = 1/(1-z^{-1})$, 测取 $t=0, t=T, t=2T, \dots$ 的响应值: $y(0) = a_0^*$, $y(T) = a_1^*$, $\dots$, 若自 $t=NT$ 起响应趋于稳态, 即有: $a_N^* \approx y(\infty)$, 这时单位阶跃响应 (Z 变换形式) 前 $N+1$ 项可表示为:

$$y(z^{-1}) = a_0^* + a_1^* z^{-1} + \dots + a_N^* z^{-N}. \quad (3)$$

对于任意输入 $\Delta u(k)$, 如果输出初始值为零, 施加控制 $\Delta u(k)$ 后, 根据线性系统叠加和比例原理, 输出为:

$$y(k) = a_0^* \Delta u(k) + a_1^* \Delta u(k-1) + \dots + a_N^* \Delta u(k-N). \quad (4)$$

1.3 差分方程模型

线性差分方程模型是一种离散时间线性动态模型, 它分为确定性差分方程和随机性差分方程, 预测控制采用随机差分方程, 一般用受控自回归积分平均模型, 输入输出关系为:

$$\Delta A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k) + C(z^{-1})\omega(k), \quad (5)$$

其中, $y(k)$ 、 $\Delta u(k)$ 和 $\omega(k)$ 分别为 k 时刻系统的输出、输入和零均值白噪声, $\Delta = 1 - z^{-1}$,

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}, B(z) = b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-(n_b+1)},$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}.$$

1.4 离散状态空间模型

状态空间模型是一种描述动态系统的完整模型, 它不仅反映系统的输入输出关系, 而且还能揭示系统内部, 以及内部与外部的联系. 该模型由状态方程和输出方程组成, 也有确定性模型和随机性模型之分, 也区分连续时间和离散时间两种情况. 预测控制一般采用离散随机时不变状态空间模型, 单输入单输出的情况为:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{G}x(k) + \mathbf{D}u(k) + \mathbf{F}\omega(k), \\ y(k) &= \mathbf{H}x(k) + d_0 u(k) + f_0 \omega(k), \end{aligned} \quad (6)$$

式中, x 、 y 和 ω 分别为状态变量、输出变量和白噪声, $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 d_0 、 f_0 分别为相应的常数矩阵、向量和系数.

2 不同模型间的关系

2.1 脉冲响应模型与阶跃响应模型

对任意输入 $\Delta u(t)$, 有式(2), 现取: $\Delta u(z^{-1}) = 1/(1-z^{-1})$, 则有:

$$\begin{aligned} y(z^{-1}) &= (g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_N z^{-N}) / (1 - z^{-1}) = \\ &= g_0 + (g_0 + g_1)z^{-1} + (g_0 + g_1 + g_2)z^{-2} + \dots + (g_0 + g_1 + \dots + g_N)z^{-N} + \\ &\quad (g_0 + g_1 + \dots + g_N)z^{-(N+1)} + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)应与式(3)相等, 比较系数有:

$$a_0^* = g_0, a_1^* = g_0 + g_1, \dots, a_N^* = g_0 + g_1 + \dots + g_N, \text{ 一般式为:}$$

$$a_i^* = \sum_{j=0}^i g_j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (8)$$

若已知 a_i^* 求 g_i , 则有: $g_0 = a_0^*$, $g_1 = a_1^* - a_0^*$, $\dots$, $g_N = a_N^* - a_{N-1}^*$, 即:

$$g_i = a_i^* - a_{i-1}^* \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N), (a_{-1}^* = 0). \quad (9)$$

值得一提的是:

①若阶跃输入幅值不为 1, 例如为 α , 则式(8)、(9)所有的 a_i^* 除 α 后, 等式仍成立.

②一般有: $g_0 = 0, a_0^* = 0$.

③对于有纯时延 $d, g_i, a_i^* (i = 0, 1, \dots, d-1)$ 均为零, 式(8)和式(9)关系式不变.

2.2 非参数模型和参数模型

分别以脉冲响应模型和差分方程模型作非参数模型和参数模型的代表, 讨论两者间的关系. 不考虑噪声, 由式(2)和式(5), 有

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \Delta u(k) = G(z^{-1}) \Delta u(k).$$

这里

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \quad (10)$$

$$\Delta A(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \dots + \bar{a}_{n_a} z^{-n_a}) = 1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \bar{a}_2 z^{-2} + \dots + \bar{a}_{n_a+1} z^{-(n_a+1)}. \quad (11)$$

由式(10)和式(11), 有

$$(1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \bar{a}_2 z^{-2} + \dots + \bar{a}_{n_a+1} z^{-(n_a+1)})(g_1 + g_2 z^{-1} + \dots + g_N z^{-N+1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b},$$

比较两边系数有

$$g_1 = b_0, g_2 = b_1 - \bar{a}_1 g_1, g_3 = b_2 - \bar{a}_1 g_2 - \bar{a}_2 g_1, \dots$$

$$g_i = b_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_j g_{i-j} \quad (1 \leq i \leq N). \quad (12)$$

式中, $i > n_b$ 时, $b_i = 0$, $i > n_a + 1$ 时, $\bar{a}_i = 0$.

当知道脉冲响应序列值, 要确定差分方程参数时, 由于一般有 $N > n_a + n_b + 1$, 所以式(10)提供了过多的信息, 如果截取 $G(z^{-1})$ 前 $n_a + n_b + 1$ 个参数, 则有确切的转换关系:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_b} \\ -\bar{a}_1 \\ \vdots \\ -\bar{a}_{n_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -g_2 & -g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -g_{n_b} & -g_{n_b-1} & \dots & -g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -g_{n_b+1} & -g_{n_b} & \dots & -g_2 & -g_1 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -g_{n_b+n_a} & -g_{n_b+n_a-1} & \dots & -g_{n_b+1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n_b+1} \\ g_{n_b+2} \\ \vdots \\ g_{n_b+n_a+1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

2.3 差分方程模型和离散状态空间模型

将式(11)代入式(5), 有

$$(1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \dots + \bar{a}_{n_a+1} z^{-(n_a+1)})y(k) = (b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b})\Delta u(k) + (1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n})\omega(k).$$

上式描绘了 $y, \Delta u$ 和 ω 对离散时间的相对关系, 整段时域的提前和退后不影响输入输出关系, 所以两边同乘 z^{n_a+1} , 上式可写为典范差分方程形式:

$$y(k + n_a + 1) + \bar{a}_1 y(k + n_a) + \dots + \bar{a}_{n_a+1} y(k) = b_0 \Delta u(k + n_a) + \dots + b_{n_b} \Delta u(k + n_a + 1 - n_b) + \omega(k + n_a + 1) + c_1 \omega(k + n_a) + \dots + c_n \omega(k + n_a + 1 - n_c).$$

$$\begin{aligned} \text{令: } x_1(k) &= y(k) - d_0 \Delta u(k) - f_0 \omega(k), x_2(k) = x_1(k+1) - d_1 \Delta u(k) - f_1 \omega(k), \dots, \\ x_{n_a+1}(k) &= x_{n_a}(k+1) - d_{n_a} \Delta u(k) - f_{n_a} \omega(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则有: } x_1(k+1) &= x_2(k) + d_1 \Delta u(k) + f_1 \omega(k), x_2(k+1) = x_3(k) + d_2 \Delta u(k) + f_2 \omega(k), \dots, \\ x_{n_a+1}(k+1) &= -\bar{a}_{n_a+1} x_1(k) - \dots - \bar{a}_1 x_{n_a+1}(k) + d_{n_a+1} \Delta u(k) + f_{n_a+1} \omega(k) \end{aligned}$$

从而有离散状态方程和输出方程

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{G}x(k) + \mathbf{D}\Delta u(k) + \mathbf{F}\omega(k) \\ y(k) &= \mathbf{H}x(k) + f_0 \omega(k) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{这里: } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\bar{a}_{n_a+1} & -\bar{a}_{n_a} & -\bar{a}_{n_a-1} & \dots & -\bar{a}_1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_a+1} \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n_a+1} \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T, f_0 = 1$$

$x(k)$ 为 n_a+1 维状态变量, 且式中 d_i, f_i 分别为

$$d_0 = 0, d_1 = b_0, d_2 = b_1 - \bar{a}_1 d_1, d_3 = b_2 - \bar{a}_1 d_2 - \bar{a}_2 d_1, \dots, \text{通式为}$$

$$d_i = b_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_j d_{i-j} \quad (1 \leq i \leq n_a+1, i > n_b \text{ 时}, b_i = 0). \quad (15)$$

$$f_0 = 1, f_1 = c_1 - \bar{a}_1 f_0, f_2 = c_2 - \bar{a}_1 f_1 - \bar{a}_2 f_0, \dots, \text{通式为}$$

$$f_i = c_i - \sum_{j=1}^i \bar{a}_j f_{i-j} \quad (0 \leq i \leq n_a+1, i > n_c \text{ 时}, c_i = 0) \quad (16)$$

对比式(15)和式(12)可知, d_i 就是 g_i , 即 $\mathbf{D}$ 中各元素就是系统输出对输入的单位脉冲响应序列前 n_a+1 项; 同理, $f_i (i=0, 1, \dots, n_a+1)$ 是输出对噪声的单位脉冲响应序列前 n_a+1 项。

由状态空间模型求受控自回归积分平均模型, 即由已知的 $\mathbf{G}, \mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{H}$ 和 f_0 确定 $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 。

式(14)两方程分别取 Z 变换, 并将状态方程代入输出方程, 得:

$$\begin{aligned} y(z) &= \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{D} \Delta u(z) + [\mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{F} + f_0] \omega(z) = \\ &= \frac{\mathbf{H} \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) \mathbf{D}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \Delta u(z) + \frac{\mathbf{H} \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) \mathbf{F} + f_0 |z\mathbf{I} - \mathbf{G}|}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \omega(z) \end{aligned}$$

式中, $\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ 为 $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ 的伴随矩阵, $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ 为 $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ 的行列式。

$$\text{由式(5)有} \quad y(z) = \frac{B(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \Delta u(z) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \omega(z)$$

对比上两式, 有:

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= \mathbf{H} \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) \mathbf{D} z^{-(n_a+1)}, & C(z) &= [\mathbf{H} \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) \mathbf{F} + f_0 |z\mathbf{I} - \mathbf{G}|] z^{-(n_a+1)} \\ \Delta A(z^{-1}) &= |z\mathbf{I} - \mathbf{G}| z^{-(n_a+1)}, & A(z^{-1}) &= \Delta A(z^{-1}) / \Delta \end{aligned}$$

3 模型描述的统一形式

上述几种预测控制的模型, 均可用状态空间法统一表示^[2]。如果将脉冲和阶跃响应模型也作为参数模型看待, 则可不必要进行非参数到参数模型的转换, 而直接按状态空间法描述, 不过此时的状态实现是一种非最小实现。

对脉冲响应模型, 施加输入 $\Delta u(k)$, 不考虑噪声, 由式(2)有:

$$y(k) = (g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_N z^{-N}) \Delta u(k)$$

与式(5)相比, 有: $\Delta A(z^{-1}) = 1$, $B(z^{-1}) = G(z^{-1})$. 用与 2.3 相同的方法, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\Delta u(k), \\ y(k) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + d_0 u(k) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{式中 } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T, \mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{pmatrix}, d_i = g_i, (i = 0, 1, \dots, N).$$

对于阶跃响应模型, 考虑任意输入 $\Delta u(k)$, 假定输出初始值为零, 不考虑噪声时, 有式(4), 与脉冲响应模型相同: $\Delta A(z^{-1}) = 1$, 但: $B(z^{-1}) = a_0^* + a_1^* z^{-1} + \dots + a_N^* z^{-N}$, 状态空间表达式同式(17), 且 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{H}$ 相同, 仅 $\mathbf{D}$ 的元素求法不同, $d_i = a_i^* (i = 0, 1, \dots, N)$.

4 结束语

以上揭示了预测控制不同模型之间的关系, 给出了相应的转换公式, 为预测控制的设计和分析提供了方便. 尽管目前的预测控制算法绝大部分不是以状态空间法表示的, 但状态空间表示法的确具有普遍意义, 可作为一种模型描述的统一形式, 并且有关学者指出^[3], 用状态空间法描述的预测控制算法具有大大减少在线计算量的优点.

参考文献:

- [1] 舒迪前. 预测控制系统及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996. 64-62, 127-132.
- [2] 李嗣福, 陈忠保. GPC 的预测控制空间形式及预测控制算法的统一[J]. 控制与决策, 1998, 13(1): 34-38.
- [3] 李嗣福. 一种改进的模型算法[J]. 信息与控制, 1988, (1): 15-19.

The Common Models in Predictive Control and Their Interrelations and United Form

XU Xiang-yuan¹, MAO Zong-yuan²

(1. Dept. of Electric Engineering & Automation, GDUT, Guangzhou 510090, China;

2. Dept. of Automatic Control Engineering, SCUT, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In accordance with the descriptions of some models in predictive control algorithm, the relation among these models was revealed, corresponding converting formulas among models were given, which make the design and analyses of predictive control system convenient. These different models can be united by the method of state space.

Key words: types of model description; relations of models; state space method; predictive control